Komplexní Doučování pro Vysoké Školy

Lineární algebra - 4MM101, 4MM106

Příklad 1 *Určete inverzní matici k matici* $\boldsymbol{A}$ *a podle definice inverzní matice proveďte zkoušku správnosti výpočtu, jestliže*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení 1.
Aby mělo vůbec smysl počítat inverzní matici z dané matice, musí být daná matice nutně regulární. Univerzálním postupem pro výpočet inverzní matice je přidání příslušné jednotkové matice vedle dané matice, t.j.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

Postup je jednoduchý. Je třeba převést úplnou Gaussovu a Jordanovu eliminační metodu tak, aby jednotková matice zůstala na levé straně. Pokud se nám to podaří, pak to, co zůstane na pravé straně, bude naše hledaná inverzní matice, takže nejdříve přejdeme k provedení Gaussovy eliminační metody. V prvním kroku prohodíme 1. a 2. řádek matice (1), tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2}$$

Vidíme, že pod hlavní diagonálou jsou všechny nuly, a tím jsme dokončili Gaussovu eliminační metodu. Nyní pokračujeme Jordanovou eliminační metodou a vynásobíme 3. řádek matice (2) číslem -1 a přičteme jej ke 2. řádku a zároveň přičteme 3. řádek k 1. řádku, tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3}$$

V posledním kroku přičteme 2. řádek matice (3) k 1. řádku, t.j.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{4}$$

Vidíme, že na levé straně matice (4) jsme získali jednotkovou matici[1], čímž je celý proces dokončen. Vše, co vzniklo za dělící čarou vpravo, je naše hledaná inverzní

[1]Pokud by se nám to nepodařilo, znamenalo by to, že daná matice byla singulární, a tudíž by neexistovala žádná inverzní matice

matice $\mathbf{A}^{-1}$. Zadání však ještě není dokončeno, protože je třeba provést kontrolu správnosti a zjistit, zda je náš výsledek skutečně inverzí dané matice. K této kontrole použijeme definici inverzní matice ($\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{J}$) a provedeme maticové násobení naší inverzní matice s danou maticí, podobně jako v příkladu 6, t.j.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Vidíme, že součin obou matic nám dává jednotkovou matici, a proto je námi vypočtená inverzní matice správná.

Odpověď: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

Příklad 2 *Z nasledujúci maticové rovnice vypočtěte neznámou matici* $\boldsymbol{X}$ *a uveďte pro které matice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ *se dá matice* $\boldsymbol{X}$ *z této rovnice osamostatnit, jestliže*

$$\mathbf{X} + \mathbf{A} = 4\mathbf{A} - \mathbf{X}\mathbf{C}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení 2.

Nejdříve musíme z dané rovnice vyjádřit neznámou matici $\mathbf{X}$. Při všech úpravách, které budeme provádět, musíme mít na paměti následující základní pravidla, a to $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{J}$ a $\mathbf{AJ} = \mathbf{JA} = \mathbf{A}$. Nejprve musíme přehodit všechny neznámé matice $\mathbf{X}$ na jednu stranu a vše ostatní na druhou stranu.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} + \mathbf{XC} &= 4\mathbf{A} - \mathbf{A} \qquad | \; (4\mathbf{A} - \mathbf{A} = 3\mathbf{A}) \\ \mathbf{X} + \mathbf{XC} &= 3\mathbf{A} \\ \mathbf{X}(\mathbf{J} + \mathbf{C}) &= 3\mathbf{A} \qquad\qquad | \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{X}(\mathbf{J} + \mathbf{C})(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} &= 3\mathbf{A}(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{X} &= 3\mathbf{A}(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

Vidíme, že matematické úpravy v (6) jsou možné pouze tehdy, pokud existuje inverzní matice $(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1}$. Ta existuje pouze tehdy, je-li $(\mathbf{J} + \mathbf{C})$ regulární. Pokud by $(\mathbf{J} + \mathbf{C})$ nebylo regulární, pak bychom daný postup nemohli použít. Dále dosadíme matice ze zadání do výsledku pro $\mathbf{X}$, přičemž $\mathbf{J}$ považujeme za jednotkovou matici, tedy:

$$\mathbf{X} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \tag{7}$$

Dále upravíme (7) vynásobením první matice číslem 3 a současne udeláme součet matic v závorce, t.j:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{8}$$

Výslednou inverzní matici řešíme přesně jako v příkladu 14 s tím rozdílem, že tentokrát se jedná o matici 2x2[2]., t.j.:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Výsledek (10) dosadíme do (7) a dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

Odpověď: $\mathbf{X} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ $\square$

Příklad 3 *Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= -9 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení 3.

Nejprve zapíšeme danou soustavu rovnic v maticovém tvaru jako:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Dále pojmenujeme jednotlivé členy v maticovém tvaru (12). Matice na začátku bude matice nám známé soustavy $\mathbf{A}$, za ní bude následovat náš neznámý vektor $\vec{x}$ a za rovná se je vektor pravých stran, který označíme jako $\vec{b}$, tedy:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \vec{b} \qquad | \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{b} \end{aligned} \tag{13}$$

Nyní máme vyjádřený neznámý vektor $\vec{x}$, který stačí vypočítat. K tomu nám stačí vypočítat inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$. Jinými slovy, soustavu rovnic můžeme metodou inverzní matice vypočítat pouze tehdy, je-li matice soustavy dána regulární maticí.

[2]Inverzní matici obecní matice 2x2 vypočítáme takto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{9}$$

Pokud by tedy matice soustavy nebyla čtvercová nebo byla singulární, pak bychom museli řešit maticovou rovnici pouze Gaussovou nebo Jordanovou eliminační metodou. Do rovnice (13) dosadíme čísla ze zadání, tedy:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -28 \\ 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

Odpověď: $\vec{x} = (-2, 1)$. $\square$

...

Matematická analýza - 4MM101, 4MM106

Příklad 4 *Určete reálny parametr a tak, aby platilo*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2}{3-2n}+2n+1\right)=\infty$$

Řešení 1.
Tento typ příkladu poznáme podle toho, že opět obsahuje nejvýše celé mocniny n, ale narozdíl od příkladu 6 obsahuje i zlomek. Ideálním postupem při řešení tohoto typu je úprava celé limity na společného jmenovatele, t.j.:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2}{3-2n}+2n+1\right)&=\infty\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+2n(3-2n)+1(3-2n)}{3-2n}\right)&=\infty\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+6n-4n^2+3-2n}{3-2n}\right)&=\infty\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(a-4)+4n+3}{3-2n}\right)&=\infty
\end{aligned}\tag{15}$$

Druhým krokom zůstává vždy vytknout z čitatele i jmenovatele největší mocninu, tedy:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(a-4)+4n+3}{3-2n}\right)&=\infty\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\cancel{2}1}\left(\frac{\cancel{n^2}(a-4)}{\cancel{n^2}}+\frac{4\cancel{n}}{n^{\cancel{2}1}}+\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n}\left(\frac{3}{n}-\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}\right)}\right)&=\infty\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left((a-4)+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\left(\frac{3}{n}-2\right)}\right)&=\infty
\end{aligned}\tag{16}$$

Posledním krokem je dosazení limity do mezivýsledku (16), tedy.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\infty\left((a-4)+\frac{4}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}\right)}{\left(\frac{3}{\infty}-2\right)}\right)&=\infty\\
\left(\frac{\infty\left((a-4)+0+0\right)}{(0-2)}\right)&=\infty\\
\frac{\infty\,(a-4)}{(-2)}&=\infty\\
-\infty\,(a-4)&=\infty
\end{aligned}\tag{17}$$

kde jsme opět použili pouze základní charakteristiky úprav s nekonečnami. Podobně jako v předchozím příkladu musíme vyřešit všechny možnosti závorky v rovnici (17).

- $(a-4)<0 \implies -\infty\,(-)=\infty \implies \infty=\infty$. Vidíme, že v tomto případě získáme rovnost dané limitní rovnice, záporná závorka tedy patří mezi přípustná řešení rovnice.

- $(a-4)=0 \implies -\infty\,(0)=?$. V případě nulové závorky dostaneme neurčitý výraz nekonečno krát nula, a proto musíme konkrétně řešit $(a-4)=0 \implies a=4$. Tuto hodnotu a dosadíme do dané limitní rovnice a vypočítáme:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{3-2n}+2n+1\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+2n(3-2n)+1(3-2n)}{3-2n}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{4n^2}+6n-\cancel{4n^2}+3-2n}{3-2n}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{3-2n}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}\left(\frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\frac{3}{n}-\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}\right)}\right) &= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{3}{n}-2\right)}\right) &= \infty \\
\left(\frac{\left(4+\frac{3}{\infty}\right)}{\left(\frac{3}{\infty}-2\right)}\right) &= \infty \\
\frac{(4+0)}{(0-2)} &= \infty \\
\frac{(4)}{(-2)} &= \infty \\
-2 &\neq \infty
\end{aligned} \tag{18}$$

  kde jsme opět použili pouze základní vlastnosti práce s nekonečnem. Dostali jsme nesmyslný výraz, takže závorka $(a-4)=0$ není řešením původně zadané limitní rovnice.

- $(a-4)<0 \implies -\infty\,(+)=\infty \implies -\infty\neq\infty$. Daná rovnost neplatí, takže ani tento případ není řešením dané limitní rovnice.

Řešením naší limitní rovnice je tedy záporná závorka $(a-4)<0 \implies a<4$.

Odpověď: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2}{3-2n}+2n+1\right)=\infty \implies a<4 \qquad \square$

Příklad 5 *Pomocí Bolzanovy věty řešte nerovnici*

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right) arcsin(x)<0$$

Řešení 2.
Pokud máme příklad počítat pomocí Bolzanovy věty, postup je vždy následující:

- Nejprve musíme určit definiční obor funkce a tedy i určit body nespojitosti, t.j. body, kde je jmenovatel nulový.

- Poté spočítáme nulové body. Ty určíme vždy tak, že celou funkci odepíšeme a dosadíme ji rovnu nule.

- Definiční obor rozdělíme na tolik intervalů, kolik potřebujeme. Jinými slovy, vždy v každém nulovém bodě a bodě nespojitosti.
- V každém z těchto intervalů budeme zkoumat znaménko funkce.
- Vybereme si buď kladné, nebo záporné intervaly, protože příklad bude vždy dán tím, že na pravé straně bude nula, jinými slovy budeme právě zkoumat, kde je funkce záporná nebo kladná.

Definiční obor funkce lze určit velmi snadno. Vidíme, že máme součin dvou funkcí, a to $(x - \frac{1}{2})$ a $arcsin(x)$. Víme, že funkce $(x - \frac{1}{2})$ je polynom, a má tedy definiční obor celé číslo $\mathbb{R}$. Dále víme, že funkce $arcsin(x)$ má definiční obor $\langle -1; 1\rangle$, tudíž celý definiční obor funkce je:

$$D_{\left(x-\frac{1}{2}\right)arcsin(x)} = \langle -1; 1\rangle \tag{19}$$

Dále je třeba určit body nespojitosti, a protože tato funkce nemá žádný zlomek a žádnou nespojitost, je tato funkce spojitá a nemá žádné body nespojitosti. Nulové body vypočítáme z rovnice $f(x) = 0$, tedy:

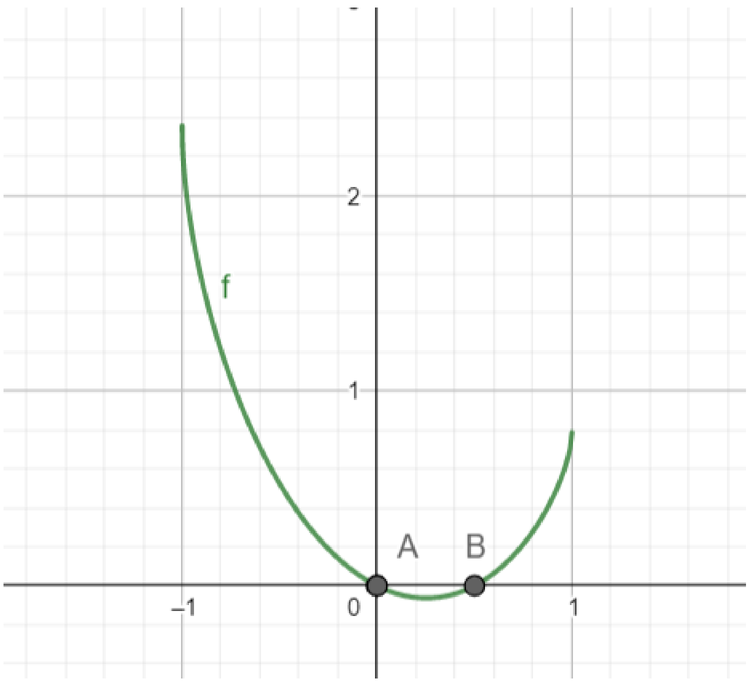
$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x) = 0 \quad &\implies \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \vee arcsin(x) = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad &\implies x = \frac{1}{2} \\ arcsin(x) = 0 \quad &\implies x = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Získali jsme dva nulové body. Jinými slovy, dva průsečníky s osou x. Nyní můžeme náš definiční obor (19) rozdělit vzhledem k nulovým bodům, které jsme spočítali, t.j. $\langle -1; 0\rangle$, $\langle 0; \frac{1}{2}\rangle$, $\langle \frac{1}{2}; 1\rangle$. Nakonec sestavíme tabulku, kde do řádků vložíme dané intervaly a do sloupců naši funkci, t.j.:

Tabulka 1: Řešení nerovnice pomocí Bolzanovy věty

Interval	$\left(x - \frac{1}{2}\right)$	arcsin(x)	$\left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x)$
$\langle -1; 0\rangle$	(–)	(–)	(–)(–)=(+)
$\langle 0; \frac{1}{2}\rangle$	(–)	(+)	(–)(+)=(–)
$\langle \frac{1}{2}; 1\rangle$	(+)	(+)	(+)(+)=(+)

Ze zadání zkoumáme, kdy je daná funkce menší než nula, takže budeme zkoumat, kdy má poslední sloupec tabulky (1) záporné znaménko. To je splněno pouze pro interval $\langle 0; \frac{1}{2}\rangle$. Podle zadání se jedná o ostrou nerovnost, jinými slovy nám chybí znaménko rovnosti, takže interval musí být otevřený z obou stran. Řešení je tedy $(0; \frac{1}{2})$. Zkontrolujme výsledek na grafu funkce, který lze vykreslit například pomocí programu Geogebra.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x)$

Z grafu vidíme, že jsme naše řešení vypočítali správně, funkce je záporná právě na intervalu $(0; \frac{1}{2})$, jinými slovy na tomto intervalu je pod osou x. Body A a B jsou naše počítané nulové body, jinými slovy průsečníky s osou x, a celá funkce je definována pouze na definičním oboru $\langle -1; 1\rangle$, na kterém je také spojitá, přesně jak jsme určili.

Odpověď: $\left(x - \frac{1}{2}\right) arcsin(x) < 0 \quad \Longrightarrow x \in (0, \frac{1}{2}) \qquad \square$

...